ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN QUỐC CƯỜNG

VẤN ĐỀ DUY NHẤT CỦA HÀM PHÂN HÌNH KHI ĐẠO HÀM CỦA ĐA THỨC CHUNG NHAU MỘT HÀM NHỎ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN QUỐC CƯỜNG

VẤN ĐỀ DUY NHẤT CỦA HÀM PHÂN HÌNH KHI ĐẠO HÀM CỦA ĐA THỨC CHUNG NHAU MỘT HÀM NHỎ

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG

THÁI NGUYÊN - 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các kết quả nghiên cứu được trình bày trong luận văn là trung thực, khách quan và không trùng lặp với các đề tài khác đã công bố ở Việt Nam.

Tôi xin cam đoan các thông tin trích dẫn trong luận văn đều được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Tác giả luận văn

Nguyễn Quốc Cường

LỜI CẢM ƠN

Với tình cảm chân thành và lòng biết ơn sâu sắc, tôi xin gửi lời cảm ơn đến PGS.TS. Hà Trần Phương đã trực tiếp hướng dẫn khoa học và tận tình giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm Lãnh đạo phòng đào tạo, đặc biệt là các thầy cô trực tiếp quản lý đào tạo sau đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K24 (2016-2018) Trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khoá học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến các đồng nghiệp, bạn bè cùng toàn thể gia đình, người thân đã động viên tôi trong thời gian nghiên cứu đề tài.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Tác giả luận văn

Nguyễn Quốc Cường

Mục lục

Mở đầu

Vấn đề nghiên cứu sự xác định duy nhất của các hàm ánh xạ phân hình thông qua ảnh ngược của một tập hữu hạn thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học trong và ngoài nước G. Polia, R. Nevanlinna, F.Gross, ... và thu được nhiều kết quả quan trọng. Năm 1926, R. Nevanlinna đã chứng minh nếu hai hàm phân hình f, g chung nhau năm giá trị phân biệt thì trùng nhau. Kết quả này của Nevanlinna cho thấy một hàm phân hình phức được xác định một cách duy nhất ánh xạ ngược, không kể bội, của năm giá trị phân biệt. Công trình này của ông được xem là khởi nguồn cho các nghiên cứu sự xác định duy nhất của hai hàm ánh xạ phân hình. Về sau, vấn đề nghiên cứu sự xác định duy nhất của hai ánh xạ phân hình thông qua ảnh ngược của một tập hữu hạn thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước.

Một vấn đề được đưa ra bởi F. Gross đó là : Tồn tại hay không một tập hữu hạn S, điều kiện $E(S, f) = E(S, g)$ kéo theo $f = g$?. Trong thực tế câu hỏi của F. Gross có thể được phát biểu như sau: Tồn tại hay không đa thức P sao cho với bất kì căp phân hình khác hằng f và g ta có $f = g$ nếu $P(f)$ và $P(g)$ chung nhau giá trị kể cả bội?. Vấn đề này đã được nghiên cứu một cách liên tục mạnh mẽ với những kết quả của M. L. Fang và W. L. Hong, W. C. Lin và H. X. Yi... thời gian gần đây có một số tác giả nghiên cứu vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình trong hai trường hợp phức và $p-$adic khi đạo hàm của hai đa thức của các hàm phân hình chung nhau một hàm nhỏ (xem [2],[3],[11]).

Mục đích của đề tài luận văn là trình bày một số kết quả mới của các tác giả đã công bố trong thời gian gần đây về các hàm phân hình trên trường số phức và $p-$adic, khi hai đa thức $f'P'(f)$ và $g'P'(g)$ chung nhau một hàm nhỏ được công bố bởi ba tác giả A. Escassut, K.Boussaf, J. Ojeda.

Luận văn chia thành hai chương, Chương 1 giới thiệu về một số vấn đề cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị bao gồm hai định lý cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna trong trường hợp phức và trường hợp $p-$adic cùng một số kết quả chuẩn bị. Trong Chương 2, trình bày vấn đề duy nhất khi $f'P'(f)$ và $g'P'(g)$ chung nhau một hàm nhỏ .

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS Hà Trần Phương, người đã tận tình hướng dẫn để tôi có thể hoàn thành khóa luận này. Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các thầy cô giáo trong khoa Toán, Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Đại học Thái Nguyên đã dạy bảo tôi tận tình trong suốt quá trình học tập tại khoa. Nhân dịp này Tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, đã luôn bên tôi, cổ vũ, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn tốt nghiệp.

Thái Nguyên, ngày 19 tháng 08 năm 2017

Tác Giả

Nguyễn Quốc Cường

Chương 1

Các kiến thức cơ sở trong lý thuyết phân bố giá trị

1.1. Các hàm Nevanlinna

Trường hợp phức

Với mỗi số thực $x > 0$, kí hiệu: $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$. Khi đó

$$\log x = \log^+ x - \log^+(1/x).$$

Bây giờ ta định nghĩa hàm đếm, hàm xấp xỉ, hàm đặc trưng của một hàm phân hình.

Cho f là một hàm phân hình trên $\overline{D}_R$ và một số thực $r > 0$, trong đó $0 < R \leq \infty, r < R$. Dễ thấy

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi.$$

Định nghĩa 1.1. Hàm

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi$$

được gọi là hàm xấp xỉ của hàm f.

Kí hiệu $n(r, 1/f)$ là số không điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, 1/f)$ là số không điểm không kể bội của f, $n(r, f)$ là số cực điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, f)$ là số cực điểm không kể bội của f trong $\overline{D}_r$. Với một số nguyên dương k, $n_k(r, f)$ là số cực điểm bội chặn bởi k của f (tức là cực điểm bội $l > k$ chỉ được tính k lần trong tổng $n_k(r, f)$ trong $\overline{D}_r$.

Định nghĩa 1.2. Hàm

$$N(r, f) = \int\limits_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r$$

được gọi là hàm đếm kể cả bội của f (còn gọi là hàm đếm tại các cực điểm).

Hàm

$$\overline{N}(r, f) = \int\limits_0^r \frac{\overline{n}(t, f) - \overline{n}(0, f)}{t} dt + \overline{n}(0, f) \log r$$

được gọi là hàm đếm không kể bội.

Hàm

$$N_k(r, f) = \int\limits_0^r \frac{n_k(r, f) - n_k(0, f)}{t} + n_k(0, f) \log r$$

được gọi là hàm đếm bội chặn bởi k, trong đó $n(0, f) = \lim\limits_{t \to 0} n(t, f)$; $\overline{n}(0, f) = \lim\limits_{t \to 0} \overline{n}(t, f)$; $n_k(0, f) = \lim\limits_{t \to 0} n_k(r, f)$. Số k trong $n_k(r, f)$ được gọi là chỉ số bội bị chặn. Ta kí hiệu:

$$Z(r, f) = N(r, \frac{1}{f});\ \overline{Z}(r, f) = \overline{N}(r, \frac{1}{f});\ Z_k(r, f) = N_k(r, \frac{1}{f}).$$

Định nghĩa 1.3. Hàm

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$$

gọi là hàm đặc trưng của hàm f. Các hàm đặc trưng $T(r, f)$ hàm xấp xỉ $m(r, f)$ và hàm đếm $N(r, f)$ là ba hàm cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị, nó còn gọi là các hàm Nevanlinna. Lý thuyết Nevanlinna nghiên cứu quan hệ giữa tốc độ tăng của ba hàm.

Định lý sau đây trình bày một số tính chất cơ bản của hàm xấp xỉ, hàm đếm, hàm đặc trưng.

Bổ đề 1.1. *Cho các hàm phân hình* $f_1, f_2, \ldots, f_p$, *khi đó :*

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad m(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} m(r, f_\nu) + \log p;\\
&(2) \qquad m(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} m(r, f_\nu);\\
&(3) \qquad N(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} N(r, f_\nu);\\
&(4) \qquad N(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} N(r, f_\nu);\\
&(5) \qquad T(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu) + \log p;\\
&(6) \qquad T(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu).
\end{aligned}$$

Ta ký hiệu $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ là vành các hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ là trường các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$.

Bổ đề 1.2. *Cho* $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}), a \in \mathbb{C}$ *và* $P(f) \in \mathbb{C}_{[x]}$ *là một đa thức bậc* q. *Khi đó*

$$\begin{aligned}
&T(r, f+g) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1),\\
&T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g),\\
&T(r, f-a) = T(r, f) + O(1),\\
&T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) + O(1),\\
&T(r, P(f)) = qT(r, f) + O(1).
\end{aligned}$$

Bổ đề 1.3. *Cho* $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, *khi đó*

$$\begin{aligned}
&Z(r, f-a) \leq T(r, f) + O(1), \forall a \in \mathbb{C},\\
&m(r, fg) \leq m(r, f) + m(r, g),\\
&N(r, f') = N(r, f) + \overline{N}(r, f),\\
&Z(r, f') \leq Z(r, f) + \overline{N}(r, f) + S_f(r).
\end{aligned}$$